

Title	素ナル標數ノ体ノ上ノ多元環ニツイテ II.
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 88 p.1-p.none
Issue Date	1936-05-08
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74312
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

387. 素ナル標数ノ体ノ上ノ多元環ニツイテ II.

中山 正 (阪大)

前回ノ報告第 87 号 384 / 10 頁 13 行目「ソノ中最小ナルモノ」ト書イタノハ「次数が最小ナルモノ」ト証正イタシマス。

次ニ前回証明シタノハ素ナル標数 p ノ体ノ上ノ p -Potenz, Index, 多元環類ハ常ニ巡回環ノ積トシテ表ハサレルコトデシタ。而シテ一般ニソノヤウナ多元環類ハ *zyklisch* トハカヤラナイデアラウト思ヒマス (實際ニ例ヲ作ラナイ以上ハツキリハ申セマセンガ、多分ソレデアルツモリデ居マス) カラ、ソノ意味ヲ兎モ角一應完全ナワケデアリマス。然シ、實ハモット細イ構造ヲ出シタイト思ツテ居リマスノデ、ソノ第一トシテ

若シ $(K^{p^{-1}}:K)$ が有限デアツテ、ソレヲ p^m トスレバ、 K ノ上ノ p -Potenzindex ノ多元環類 α ハ必ず高々 m 個ノ巡回環ノ直積デ表ハサレル。

証明ハ大体前回ト並行、9 頁 15 行目以下ノ補助定理ヲ一寸一般ニシテ

$\text{Grad } n = p^g$ ナル *normal-einfach* + A ガ $K(\alpha): a = \alpha^n \in K$ ナル完全第二種ノ最大部分体 $K(\alpha)$ ヲ含ミ、且ツ $K(\alpha)$ ノ真部分体ニ同型ナ分解体ヲ持タナイナラバ A ハ *zyklisch* デ、前回ノ場合ト同様ニ

$$A = (a, Z, S) = Z + \alpha Z + \dots + \alpha^{n-1} Z$$

ナル形 = 表ハサレル。

前回モ証明ハ略シタカラ、次ニ簡單ニ述べヨウ。マハリ *Albert* ノヲ *modify* スレバヨイ。帰納法 = ヨレルタメ n ヨリ低イ場合 = ハ成立ットシヨウ。 $A =$ オイテ $\alpha^{p^{g-1}} = \sqrt[p]{a}$ ト可換 + 元全体ヲ B トスル、シカラバ B ハ $K(\sqrt[p]{a})$ ノ上ニ *normal-einfach* デアリ、 $K(\alpha)$ ハマハリソノ最大部分体ダガ、ソノ真部分体ハ分解体デアリ得ナイ、ソレハ $B \sim A_{K(\sqrt[p]{a})}$ ダカラデアル。

ヨツテ假定 = ヨリ B ハ

$$B = (\sqrt[p]{a}, Z', S) = Z' + \alpha Z' + \dots + \alpha^{\frac{n}{p}-1} Z'$$

ナル形 = ナル、而シテ *Albert* , (前回モ引用シタ論文ノ) 定理 2 = ヨリ

$$Z' = Z_{g-1} \times K(\sqrt[p]{a})$$

ナル K ノ上ノ $\frac{n}{p} = p^{g-1}$ 次ノ巡回拡大 Z_{g-1} ガアル、而シテ $A =$ オイテ Z_{g-1} ノスベテノ元ト可換 + 元全体ヲ D トスル、 D ハ Z_{g-1} = 對シテ *Grad* ヲデアル、若シ D が *division algebra* ナラバ *Albert* , 定理 1 = ヨリ、モシヨウデナケレバ、即チ *zerfallen* シテ居レバソノ定理ノ証明カラ、孰レ = シテモ D ノ中 = ハ

$$\sqrt[p]{a}(x_{0,1} + 1) = x_{0,1} \sqrt[p]{a}$$

デアリ、且ツ

$$D = Z_{g-1}(x_{0,1}, \sqrt[p]{a})$$

トナル如キ元 x_0 , が存在スル。今 $x_0 = (-1)^{g-1} x_0$, トオケ
 $\bowtie x_0 \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{a} (x_0 + (-1)^{g-1})$ デアル。

次 $\alpha^{-1} x_0 \alpha$ ハトモカク D ノ元ナルコトハ容易ニ分
 ルカラ、ソレヲ

$$\alpha^{-1} x_0 \alpha = \sum_{i=0}^{p-1} b_i (\sqrt[p]{a})^i; \quad b_i \in \mathcal{Z}_{g-1}(x_0)$$

ナル形ニアラス。

(D が *zerfallen* スル場合ヲモ扱ツテキレ、が前回ト、
 マタ *Albert* トモ異ツテキル点デアル、ソノ場合ニハ

$\mathcal{Z}_{g-1}(x_0)$ ハ *Körper* デナイコトニ注意サレタイ)

而シテ之レヲ更ニ $\sqrt[p]{a}$ デ *transform* シテ見ルト、
 左辺カラ容易ニワカル如ク $(-1)^{g-1}$ が加ハル、依ツテ直チ
 $= (\sqrt[p]{a})^{-1} b_0 (\sqrt[p]{a}) = b_0 + (-1)^{g-1}$, $i=1, 2, \dots, p-1$
 $=$ 對シテハ $(\sqrt[p]{a})^{-1} b_i (\sqrt[p]{a}) = b_i$ トナル、依ツテ先ツ
 $i \neq 0$ ナラ $b_i \in \mathcal{Z}_{g-1}$ デアル、何トナラバ b_i ハ $\sqrt[p]{a}$ ト
 可換、マタ x_0 ト勿論可換ナカラ D ノ核心 \mathcal{Z}_{g-1} ノ元デ
 ナケレバナラスカラデアル、マタ $(\sqrt[p]{a})^{-1} x_0 (\sqrt[p]{a}) = x_0 + (-1)^{g-1}$
 デアルカラ $b_0 - x_0$ が同様ニ \mathcal{Z}_{g-1} ノ元デアル。ヨツテ併
 セテ

$$\alpha^{-1} x_0 \alpha = x_0 + P; \quad P \in \mathcal{Z}_{g-1}(\sqrt[p]{a})$$

トナル、之レヲ繰返セバ

$$\alpha^{-p^{g-1}} x_0 \alpha^{p^{g-1}} = x_0 + P + P^S + \dots + P^{S^{p^{g-1}}} = x_0 + S_{E'/K}(\sqrt[p]{a})(P)$$

トナル、左辺ハマタ $(\sqrt[p]{a})^{-1} x_0 \sqrt[p]{a} = x_0 + (-1)^{g-1} =$ 等
シイ、依ツテ

$$S_{\mathbb{Z}'/K(\sqrt[p]{a})}(P) = (-1)^{g-1}$$

然ルニ他方 (*Albert* ノ記法 $= \beta$ ヲ用フ) β_{g-1} (*Albert* ノ論文 184 頁ヲ参照サレタシ) ,

$$S_{\mathbb{Z}_{g-1}/K} \text{ 即チ } S_{\mathbb{Z}'/K(\sqrt[p]{a})}$$

モマタ $(-1)^{g-1}$ デアル、ヨツテ \mathbb{Z}' ノ中ニ

$$\xi^S - \xi = \beta_{g-1} - P$$

ナルコトガアル。(ξ) 左ニ在ル *Artin-Schreier* , 最初ノ論文デモ、マタ以前ノ *Albert* , *Bulletin* 40 (1934)ノ論文デモ *Polynom* ノ計算デ出シテキル。

ソノ証明モ面白いガ、コノ事実ハ *Summandensystem* (*Fraktorensystem* = 對應シテ) = 關スル一般ノ定理ノ中ニ含マレルワケデ、ソウシタ意味ニ於イテ、ヨリ見易ク証明モ出來ル。例ヘバ *Crelle* 173, S. 43 , *Witt* ノ論文参照) , 而シテ $x' = x_0 + \xi$ トオケバ

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} x' \alpha &= x_0 + P + \xi^S = x_0 + P + \xi + \beta_{g-1} - P \\ &= x' + \beta_{g-1}. \end{aligned}$$

デアル、繰返セバ

$$(\sqrt[p]{a})^{-1} x' (\sqrt[p]{a}) = x' + (-1)^{g-1}$$

ガナル、今 $(X - x')(X - x' + 1) \cdots (X - x' + p - 1)$ ヲ作ツ

ヲ見ル、コノ $= X$ ハ不定元ヲ勿論 x' ト可換トスル、實際
 $=$ 計算スルト

$$X^p - X - C$$

ナル形 $=$ ナル、コノ $= C$ ハ $\pm x'(x'+1) \cdots (x'+p-1)$

デアアルカラ容易 $= \sqrt[p]{a}$ ト可換ナルコトガワカル、マタ x'
 ト可換、故 $= \mathbb{Z}_{g-1}$ ノ元デアアル、何トナラバ

$$D = \mathbb{Z}_{g-1}(x_0, \sqrt[p]{a}) = \mathbb{Z}_{g-1}(x', \sqrt[p]{a})$$

デアカラデアアル、故 $=$

$$x'^p - x' = c \in \mathbb{Z}_{g-1}$$

而シテコノ式ヲ α デ *transform* スルコト $=$ ヨリ容易
 $=$

$$\alpha^{-1} C \alpha - C = C^S - C = \beta_{g-1}^p - \beta_{g-1}$$

トナル、コノ事カラ $X^p - X - C = 0$ ガ \mathbb{Z}_{g-1} デ *irreducible*
 ナルコトガワカリ (*Albert, Bulletin* 40), 従ッテソ
 レガ x' , \mathbb{Z}_{g-1} = 於ケル *minimal equation* デアリ、
 $\mathbb{Z}_{g-1}(x')$ ハ *Körper* デアル。(コノコトハ D ガ *divisionsalgebra* ナラ自明デアツタ)。以下

$\mathbb{Z}_{g-1}(x') = K(x')$ ガ K ノ p^g 次ノ巡回拡大デアリ、 α
 $=$ ヨリ ソノ生成置換ガオコサレルコトモ明カデアリ、依ッテ
 主張ガ証明サレル。

コノコトヲ使ッテ我々ノ定理ヲ証明スル、先ヅ $(K^{p^m} : K)$
 $= p^m$ ナラバ K ノ中カラ適當 $= m$ 個ノ元 a_1, a_2, \dots, a_m
 ヲトリ出シテ

$$K^{p^{-1}} = K(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}, \dots, \sqrt[p]{a_m})$$

ト出来ル、而シテ任意ノ $e \geq 1$ = 對シテ

$$K^{p^{-e}} = K(\sqrt[p^e]{a_1}, \dots, \sqrt[p^e]{a_m})$$

デアアル、依ツテ私ノ昨年ノ學士院ノ小論文 = ヨツテ \mathcal{O} ナル
多元環類ハトモカク

$$L = K(\sqrt[p^{e_1}]{a_1}, \sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \dots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l}); e_i \geq 1, l \leq m$$

ナル形ノ分解体ヲモツ、コト =

$$K(\sqrt[p^{e_1-1}]{a_1}, \sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \dots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l})$$

ハモハマ分解体デナイト假定シテカマハヌ、依ツテ

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}, \text{ 但シ } \overline{K} = K(\sqrt[p^{e_2}]{a_2}, \dots, \sqrt[p^{e_l}]{a_l})$$

= 對シテ上 = 証明シタ事實ヲ適用シテ、后ハ前回 = マツタノ
ト大体同ジ方法デマツテ行ケバヨイノデアアル、即チ一ツダケ
巡回環類ヲ取り出シテ残リハ \overline{K} が分解体トナルヤウニスル
ノデアアル。結局 l 個ノ巡回環類ノ積 = ナル。

「次元論」プリント

Paul Alexandroff ノ大著 "Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen." (Math. Ann. Bd. 106 S. 161—238) ヲプリント刷リニシタイト思ヒマス。希望者ハ至急御申込ミ下さい。

但シ希望者 餘リニ少ナケレバ中止デス。五十名程ナラバプリント刷リ, 百名程ナラバ寫眞版 (オフセット) ニスル豫定デス。

定價ハ何レニテモ二, 三円デス。